

# Una prueba de rachas para la alternativa “estocásticamente mayor que” en muestras de la distribución lognormal

## Resumen

Se propone una prueba de rachas para la hipótesis de simetría alrededor de una mediana desconocida con alternativa de “estocásticamente mayor que” basada en una prueba de rachas recortada para la hipótesis de simetría alrededor de una mediana conocida con alternativa de dos colas propuesta en Babativa & Corzo (2010). Por medio de un estudio de simulación se muestra que para muestras de la Distribución Lognormal la prueba propuesta mantiene el tamaño bajo la hipótesis de simetría y que su potencia empírica supera la de las pruebas propuestas en Cabilio & Masaro (1996), Mira (1999) y Miao et al. (2006).

**Palabras clave:** Pruebas de Rachas recortadas, Estocásticamente mayor que, Potencia de una prueba.

## Abstract

We propose a runs test for the hypothesis of symmetry around an unknown median with alternative “stochastically larger than” based on a trimmed runs test for the hypothesis of symmetry around a known median with two-tailed alternative proposed in Babativa & Corzo (2010). By a simulation study we show that for samples coming from the Lognormal Distribution, the proposed test maintains the prefixed size and that its empirical power is larger than the other compared tests proposed in Cabilio & Masaro (1996), Mira (1999) and Miao et al. (2006).

**Keywords:** Trimmed Runs Tests, Symmetry Tests, stochastically larger than, Power of a test.

## 1. Introducción

El supuesto de simetría de la distribución muestreada es necesario en muchos de los métodos no paramétricos basados en rangos. Para validar este supuesto existen varias pruebas con alternativa de dos colas conocidas también como “estocásticamente diferente”. Por otra parte, en aplicaciones sobre la distribución del ingreso, el consumo o la sobrevivencia, resulta de sumo interés identificar la dirección de la

asimetría. En el primer caso proporciona un indicador de inequidad; en el segundo puede utilizarse para identificar grandes consumidores potenciales, y en el caso de la sobrevivencia es útil para estimar la duración de algún aparato, o el tiempo que sobrevive un paciente después de un tratamiento. Para esto son necesarias pruebas con alternativa de cola derecha o “estocásticamente mayor” y de cola izquierda o “estocásticamente menor”.

El tema se puede tratar como un problema de una muestra en el que se dispone de  $N$  observaciones independientes  $X_1^*, \dots, X_N^*$  de una característica  $X^*$  provenientes de una distribución arbitraria continua  $F(x - \theta)$  con mediana  $\theta$ . Para verificar si  $F$  es simétrica se prueba la hipótesis:

$$H_0 : F(x - \theta) = 1 - F(\theta - x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

y la asimetría se identifica con alguna de las siguientes alternativas:

$$K_1 : F(x - \theta) \neq 1 - F(\theta - x), \text{ para al menos un } x \in \mathbb{R} \text{ (asimetría)} \quad (2)$$

$$K_2 : F(x - \theta) < 1 - F(\theta - x), \text{ para al menos un } x \in \mathbb{R} \text{ (estocásticamente mayor)} \quad (3)$$

$$K_3 : F(x - \theta) > 1 - F(\theta - x), \text{ para al menos un } x \in \mathbb{R} \text{ (estocásticamente menor)} \quad (4)$$

Para las alternativas  $K_2$  y  $K_3$  se encuentran en la literatura las pruebas de Kolmogorov-Smirnov para una cola propuestas en Cabilio & Masaro (1996), Mira (1999), Miao et al. (2006) y Chatterjee & Sen (1971) entre otras.

Las pruebas propuestas en Corzo & Babativa (2013) para la alternativa de asimetría  $K_1$  utilizan estadísticas de rachas recortadas, ponderadas positiva o negativamente según la cola en la que se encuentren las observaciones en la distribución muestreada, de manera que los signos de los valores de las estadísticas son indicadores de la cola para la cual se presenta la asimetría. Este hecho que se aprovechará para estudiar el comportamiento de la potencia empírica de dichas pruebas para la alternativa  $K_2$ . Para la alternativa  $K_3$  se requieren cambios menores que se explican adelante. En la sección 2, se introduce la prueba propuesta; en la sección 3, se muestra el estudio de Monte Carlo y los resultados principales; y en la sección 4, se dan algunas conclusiones y recomendaciones.

## 2. Prueba propuesta

El número de rachas en la muestra se obtiene de la siguiente transformación: sean  $\hat{\theta}$  la mediana muestral;  $X_i = X_i^* - \hat{\theta}$ ,  $i = 1, \dots, N$  las observaciones centradas por la mediana muestral y  $|X|_{(1)}, \dots, |X|_{(N)}$  la sucesión ordenada de valores absolutos de las observaciones centradas. Se definen el rango  $R_i$  de  $|X_i|$  y el antirango  $D_j$  de  $|X|_{(j)}$  por las relaciones  $|X_i| = |X|_{(R_i)}$  para  $i = 1, \dots, N$  y  $|X_{D_j}| = |X|_{(j)}$ , para  $j = 1, \dots, N$ .

Se define la sucesión dicótoma

$$\eta_j = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{D_j} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \quad (5)$$

en la cual están representadas las observaciones positivas por unos y las negativas por ceros. Aunque  $\eta_j$  depende de  $D_j$ , por simplicidad solo se usará el subíndice  $j$  teniendo en cuenta, cuando sea necesario, su dependencia de  $D_j$ . Dicha sucesión tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \eta_1 = \dots = \eta_{L_1} \neq \eta_{L_1+1} \dots = \eta_{L_1+L_2} \neq \eta_{L_1+L_2+1} = \dots \\ \dots \neq \dots = \eta_{L_1+\dots+L_{S-1}} \neq \eta_{L_1+\dots+L_{S-1}+1} = \dots = \eta_N, \end{aligned} \quad (6)$$

en la cual se distinguen  $S \geq 1$  grupos de símbolos idénticos, cada uno de los cuales define una racha. Además, el  $i$ -ésimo grupo es de longitud  $L_i$ .

El número de rachas está determinado por los cambios en la sucesión dicótoma de observaciones positivas a negativas o viceversa. Para esto se define  $I_1 = 1$ , y los siguientes indicadores de cambios:

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{if } \eta_{j-1} \neq \eta_j \\ 0 & \text{if } \eta_{j-1} = \eta_j \end{cases} \quad j = 2, \dots, N. \quad (7)$$

Se define el número parcial de rachas hasta la  $j$ -ésima observación más pequeña así:

$$S_j = \sum_{k=1}^j I_k = 1 + \sum_{k=2}^j I_k, \quad j = 2, \dots, N. \quad (8)$$

Con la convención de que para  $N = 1$  la suma vale cero. En particular  $S_N = S$  es el número total de rachas en la sucesión dicótoma y corresponde a una estadística propuesta por McWilliams (1990) para la alternativa  $K_1$ .

Siguiendo a Modarres & Gastwirth (1996) bajo  $H_0$  se cumple  $P(I_k = 1) = P(I_k = 0) = 1/2$ . En cambio, bajo  $K_2$ ,  $P(I_k = 1) \geq P(I_k = 0)$  y depende de  $k$ , debido a que la cola derecha de  $F$  bajo  $K_2$  es más larga que su cola izquierda. En estas condiciones ocurrirán muchas observaciones positivas en la cola derecha y por lo tanto pocas rachas de unos. Análogamente, bajo  $K_3$  ocurrirán pocas rachas de ceros en la cola izquierda. Siguiendo la metodología propuesta por Corzo (1989) y tomando la idea de recortar observaciones de la muestra presentada por Modarres & Gastwirth (1996) y Modarres & Gastwirth (1998) se utiliza la estadística propuesta por Babativa & Corzo (2010):

$$R_p = \frac{1}{S_N} \sum_{i=[Np]+1}^N \phi(S_i, i) \delta_i \quad (9)$$

donde

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{D_i} > 0 \\ -1 & \text{si } X_{D_i} < 0 \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, N,$$

y

$$\phi(S_i, i) = \begin{cases} S_i - pS_N & \text{si } i > [Np] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Aquí  $p$  es una proporción de recorte;  $[Np]$  es la parte entera de  $Np$ ;  $S_N$  es el número total de rachas en la sucesión dicótoma.

Para identificar la región crítica, sea  $x > 0$  entonces bajo la alternativa  $K_2$  se espera que  $P(X \leq x) < P(X > -x)$  lo que implica que la muestra tendrá más observaciones positivas que negativas, generándose pocas rachas de unos con longitudes grandes en las últimas posiciones (valores grandes de  $i$ ). Como son rachas largas de unos el valor de  $\delta_i$  es positivo y por tanto los valores de  $R_p$  tenderán a ser positivos y grandes, razón por la que la prueba rechaza  $H_0$  a favor de  $K_2$  cuando  $R_p$  toma valores extremos positivos. Con un análisis análogo se puede concluir que la prueba rechaza  $H_0$  a favor de  $K_3$  cuando  $R_p$  toma valores extremos negativos.

En Corzo & Babativa (2013) se demuestra que  $E(R_p) = 0$  y que la varianza se puede aproximar por:

$$V(R_p) = \frac{1}{3(N+1)^2} \left\{ N(N^2 + 3N + 2) - [Np]([Np]^2 + 3[Np] - 4) \right. \\ \left. + 3p^2(N-1)(N^2 - N[Np] + 4) \right. \\ \left. - 3p(N^3 + N^2 + 2N - N[Np]^2 - N[Np] + 4[Np]) + 6 \right\}$$

La distribución de  $R_p$  es simétrica alrededor de cero y la diferencia entre la distribución de  $R_p$  (debidamente estandarizada) y la distribución normal decrece con  $N$ , siendo muy pequeña para  $N \geq 30$ , con lo cual para este ejercicio se utilizará la aproximación por la distribución normal para obtener los valores críticos de la prueba (ver Babativa (2008)).

### 3. Estudio de simulación y resultados

Los resultados están divididos en dos partes: una que corresponde a la calibración del tamaño de las pruebas y otra al cálculo y comparación de las potencias empíricas. En ambos casos se simularon 3000 muestras de tamaño  $N = 30$ .

Para la calibración se utilizó como distribución simétrica la Normal de media cero y varianza  $\sigma = 0.3(0.1)1$ . Los resultados mostrados en la Tabla 1 indican que todas las pruebas mantienen su tamaño alrededor del nivel de significancia prefijado  $\alpha = 0.05$ .

Para el cálculo de las potencias empíricas de las pruebas comparadas, las muestras se simularon de la  $DLN(\mu, \sigma)$ ,  $\mu = 0(0.1)0.6^1$  y  $\sigma = 0.3(0.1)1$ , con una proporción de recorte  $p = 0.80$ . Para cada valor de  $\mu$  se obtienen ocho distribuciones cuyo grado de asimetría varía con los valores de  $\sigma$  (ver Figura B.1) .

Se comparó la potencia empírica de la prueba propuesta con la de las siguientes pruebas:

1. Prueba de Cabilio & Masaro (1996) que utiliza la estadística:

$$CM = \frac{\sqrt{N}(\bar{X} - \hat{\theta})}{s},$$

donde  $\bar{X}$ ,  $\hat{\theta}$  y  $s^2$  son la media, la mediana y la varianza muestral respectivamente.

2. Prueba de Mira (1999) basada en la estadística:

$$M = 2(\bar{X} - \hat{\theta}),$$

3. Prueba de Miao et al. (2006) que utiliza la estadística:

$$MGG = \frac{\sqrt{N}(\bar{X} - \hat{\theta})}{J},$$

donde

$$J = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |X_i - \hat{\theta}|.$$

4. Welch (1938) adaptada para la alternativa  $K_2$  con mediana desconocida y estadística:

$$tRW = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

donde  $r_{1j}$  ( $j = 1, \dots, n_1$ ) y  $r_{2k}$  ( $k = 1, \dots, n_2$ ) denotan los rangos de las  $n_1$  observaciones positivas y de las  $n_2$  observaciones negativas respectivamente. Además,  $\bar{r}_1$ ,  $\bar{r}_2$  y  $s_1^2$ ,  $s_2^2$  denotan las medias y varianzas de  $r_{1j}$  y  $r_{2k}$  respectivamente.

Los cálculos de las potencias empíricas de las pruebas se encuentran en las Tablas 2 a 8. Cada fila de cada tabla contiene los valores de las potencias empíricas de las pruebas para las siete distribuciones que genera el cambio en  $\sigma$  para cada valor de  $\mu$  (ver Figura B.2).

En general se observa que la potencia empírica de todas las pruebas comparadas aumenta con  $\sigma$ , lo cual se evidencia al mirar las tablas por filas para cualquiera

---

<sup>1</sup>La notación  $a = b(c)d$  significa que  $a$  varía de  $b$  hasta  $d$  con incrementos de  $c$

de las pruebas. También se observa que las potencias de cada prueba también crecen con  $\mu$ , aspecto que se observa mirando las correspondientes potencias de cada prueba de tabla en tabla para el valor de sigma. Así por ejemplo, para la prueba  $R_p$  la potencia empírica para  $\sigma = 0.3$  y  $\mu = 0$  es 0.357, para  $\mu = 0.1$  es 0.5897, para  $\mu = 0.2$  es 0.7297 y así sucesivamente.

Finalmente, se observa que tanto con respecto a incrementos en la varianza como a incrementos en la media, la potencia empírica de la prueba  $R_p$  es mayor que la de las demás pruebas comparadas.

## 4. Conclusiones y discusión

Como se observó en todos los casos la prueba  $R_p$  domina en potencia empírica a las demás pruebas para  $\sigma \leq 0.5$ , seguida por la prueba  $MGG$  con diferencias alrededor de 0.1 . En tercer lugar se encuentra la prueba  $CM$  y  $M$  con diferencias cercanas a 0.15 y por último la prueba  $tRW$  con diferencias alrededor de 0.2. Lo anterior es indicador de que las pruebas comparadas son localmente más potentes siendo la de  $R_p$  la que crece más rápido cerca de  $H_0$ .

Para para  $\sigma > 0.5$  el desempeño de las pruebas es muy similar, aunque  $R_p$  sigue mostrando mejor desempeño.

La estadística propuesta utiliza observaciones en la cola de la distribución, razón por la cual el uso de la mediana muestral para centrar las observaciones no altera los resultados.

A manera de discusión sería conveniente realizar simulaciones de otra familia de distribuciones asimétricas para averiguar si la prueba propuesta conserva las propiedades que mostró para la distribución Lognormal. También sería interesante buscar una metodología adecuada para la selección del porcentaje de recorte acorde con, por ejemplo, el grado de asimetría de  $F$ .

## Referencias

- Babativa, G. & Corzo, J. (2010), 'Propuesta de una prueba de rachas recortada para la hipótesis de simetría', *Revista Colombiana de Estadística* **33**(2), 251–271.
- Babativa, J. (2008), Propuesta de una prueba de rachas recortada para hipótesis de simetría, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias. Departamento de Estadística, Bogotá.

- Cabilio, P. & Masaro, J. (1996), ‘A simple test of symmetry about an unknown median’, *The Canadian Journal of Statistics* **24**(3), 349–361.
- Chatterjee, S. & Sen, P. (1971), ‘On Kolmogorov-Smirnov-Type Tests for Symmetry’, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **25**(1), 287–299.
- Corzo, J. (1989), Verallgemeinerte Runtests for Lage- und Skalenalternativen, Tesis de doctorado, Universitat Dortmund, Fachbereich Statistik, Universitat Dortmund, .
- Corzo, J. & Babativa, G. (2013), ‘A trimmed runs test for symmetry’, *Journal of Statistics Computation and Simulation* **83**(5), 984–991.
- McWilliams, P. (1990), ‘A Distribution-Free Test for Symmetry Based on a Runs Statistic’, *Journal of the American Statistical Association* **85**(412), 1130–1133.
- Miao, W., Gel, Y. & Gastwirth, J. (2006), ‘A new test of symmetry about an unknown median’, *Random Walk, Sequential Analysis and Related Topics - A Festschrift in Honor of Yuan-Shih Chow*. Eds.: Agnes Hsiung, Cun-Hui Zhang, and Zhiliang Ying, *World Scientific Publishe* pp. 1–19.
- Mira, A. (1999), ‘Distribution-free test for symmetry based on Bonferroni’s measure’, *Journal of Applied Statistics* **26**(8), 959–972.
- Modarres, R. & Gastwirth (1996), ‘A modified runs tes for symmetry’, *Statistics and probability* **25**(5), 575–585.
- Modarres, R. & Gastwirth, J. (1998), ‘Hybrid test for the hypothesis of symmetry’, *Journal of Applied Statistics* **25**(6), 777–783.
- Welch, B. L. (1938), ‘The significance of the difference between two means when the population variances are unequal’, *Biometrika* **29**, 350–362.

## A. Tablas

Tabla 1: Calibración  $p$ -value para muestras de la distribución  $N(0, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.0517	0.0537	0.0660	0.0553	0.0540	0.0563	0.0553	0.0563
$MGG$	0.0390	0.0380	0.0487	0.0430	0.0403	0.0437	0.0397	0.0413
$CM$	0.0377	0.0360	0.0460	0.0397	0.0377	0.0383	0.0363	0.0383
$M$	0.0347	0.0363	0.0457	0.0360	0.0367	0.0367	0.0337	0.0387
$tRW$	0.0563	0.0607	0.0670	0.0603	0.0623	0.0660	0.0597	0.0660

Tabla 2: Potencias de las pruebas para  $DLN(0, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.3570	0.5177	0.6397	0.7503	0.8370	0.8993	0.9363	0.9597
$MGG$	0.2697	0.4053	0.5277	0.6607	0.7563	0.8423	0.8977	0.9457
$CM$	0.2330	0.3467	0.4480	0.5743	0.6783	0.7723	0.8203	0.8787
$M$	0.2223	0.3357	0.4193	0.5320	0.6317	0.7220	0.7633	0.8167
$tRW$	0.1917	0.2597	0.3013	0.3713	0.4367	0.5023	0.5287	0.5920

Tabla 3: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.1, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.5897	0.7707	0.8717	0.9367	0.9750	0.9880	0.9970	0.9993
$MGG$	0.4633	0.6487	0.7823	0.8870	0.9437	0.9747	0.9903	0.9960
$CM$	0.4037	0.5780	0.6987	0.8253	0.8957	0.9497	0.9703	0.9850
$M$	0.3937	0.5603	0.6677	0.7873	0.8723	0.9230	0.9513	0.9623
$tRW$	0.3557	0.4483	0.5113	0.6077	0.6727	0.7393	0.7823	0.8287

## B. Figuras

### B.1. Función de densidad $DLN(\mu, \sigma)$

### B.2. Potencias de las pruebas $DLN(\mu, \sigma)$



Tabla 4: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.2, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.7297	0.8787	0.9497	0.9827	0.9940	0.9980	1.0000	1.0000
$MGG$	0.6027	0.7870	0.8903	0.9603	0.9827	0.9953	0.9997	0.9993
$CM$	0.5313	0.7147	0.8340	0.9253	0.9633	0.9863	0.9933	0.9973
$M$	0.5220	0.6887	0.8010	0.9033	0.9497	0.9767	0.9883	0.9910
$tRW$	0.4750	0.5797	0.6497	0.7597	0.8117	0.8643	0.8923	0.9290

Tabla 5: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.3, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.8310	0.9313	0.9827	0.9953	0.9987	1.0000	1.0000	1.0000
$MGG$	0.7123	0.8720	0.9413	0.9850	0.9963	0.9997	1.0000	1.0000
$CM$	0.6370	0.8107	0.8997	0.9663	0.9867	0.9960	0.9990	0.9997
$M$	0.6273	0.7883	0.8807	0.9580	0.9783	0.9917	0.9983	0.9993
$tRW$	0.5720	0.6793	0.7523	0.8513	0.8930	0.9317	0.9517	0.9737

Tabla 6: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.4, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.8893	0.9640	0.9930	0.9987	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$MGG$	0.7840	0.9217	0.9700	0.9933	0.9990	1.0000	1.0000	1.0000
$CM$	0.7147	0.8737	0.9450	0.9827	0.9950	0.9987	1.0000	1.0000
$M$	0.7090	0.8550	0.9313	0.9780	0.9907	0.9960	1.0000	0.9997
$tRW$	0.6527	0.7540	0.8280	0.9003	0.9360	0.9677	0.9807	0.9910

Tabla 7: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.5, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.9267	0.9807	0.9980	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$MGG$	0.8423	0.9510	0.9850	0.9987	0.9993	1.0000	1.0000	1.0000
$CM$	0.7787	0.9170	0.9700	0.9937	0.9980	1.0000	1.0000	1.0000
$M$	0.7693	0.8997	0.9600	0.9917	0.9963	0.9987	1.0000	1.0000
$tRW$	0.7203	0.8197	0.8763	0.9373	0.9627	0.9843	0.9920	0.9967

Tabla 8: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.6, \sigma)$

	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$
$R_p$	0.9527	0.9877	0.9987	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$MGG$	0.8893	0.9690	0.9920	1.0000	0.9997	1.0000	1.0000	1.0000
$CM$	0.8300	0.9437	0.9833	0.9983	0.9987	1.0000	1.0000	1.0000
$M$	0.8247	0.9330	0.9783	0.9967	0.9977	0.9993	1.0000	1.0000
$tRW$	0.7710	0.8607	0.9117	0.9610	0.9780	0.9900	0.9960	0.9983

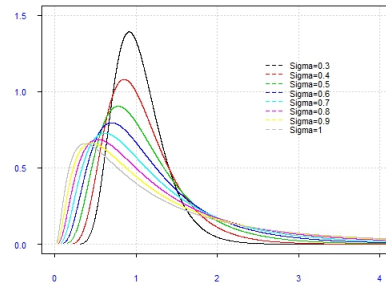


Figura 1: Función de densidad de la  $DLN(0, \sigma)$

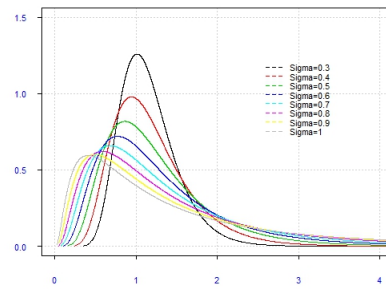


Figura 2: Función de densidad de la  $DLN(0.1, \sigma)$

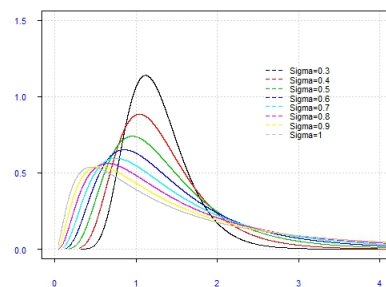


Figura 3: Función de densidad de la  $DLN(0.2, \sigma)$

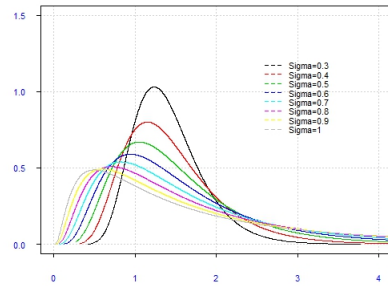


Figura 4: Función de densidad de la  $DLN(0.3, \sigma)$

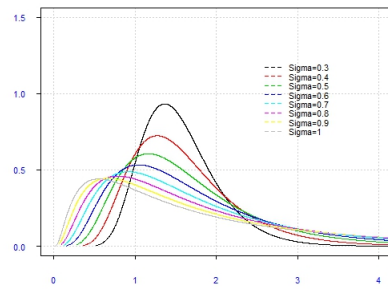


Figura 5: Función de densidad de la  $DLN(0.4, \sigma)$

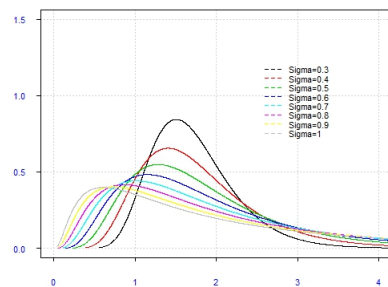


Figura 6: Función de densidad de la  $DLN(0.5, \sigma)$

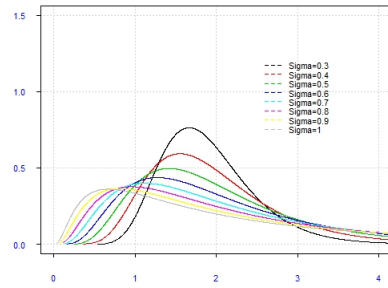


Figura 7: Función de densidad de la  $DLN(0.6, \sigma)$

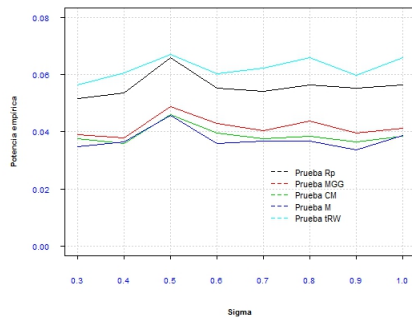


Figura 8: Calibración  $p$ -value muestras distribución  $N(0, \sigma)$

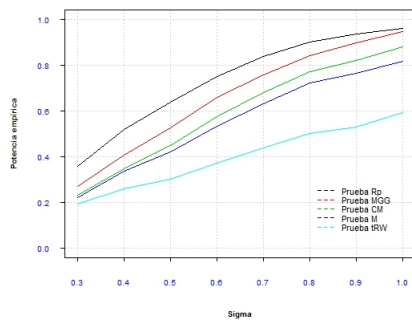


Figura 9: Potencias de las pruebas para  $DLN(0, \sigma)$

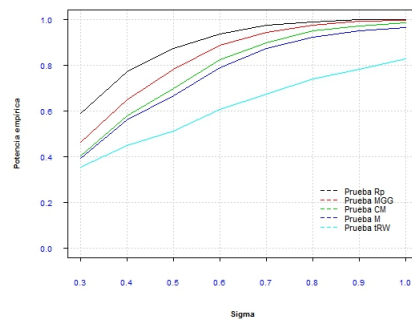


Figura 10: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.1, \sigma)$

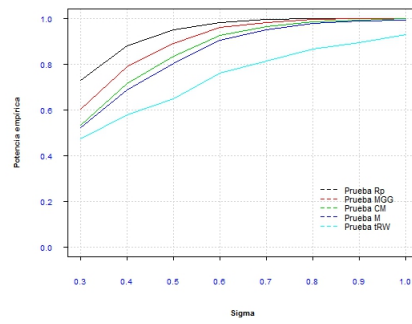


Figura 11: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.2, \sigma)$

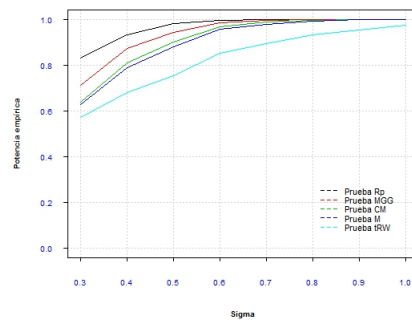


Figura 12: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.3, \sigma)$

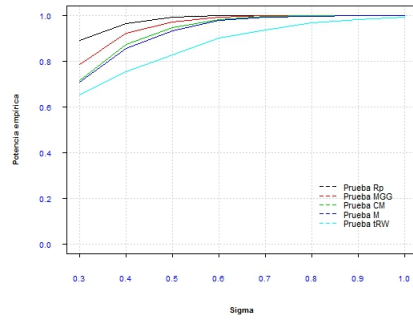


Figura 13: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.4, \sigma)$

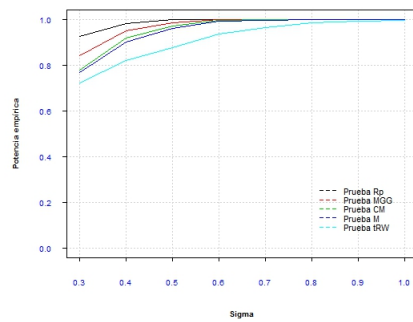


Figura 14: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.5, \sigma)$

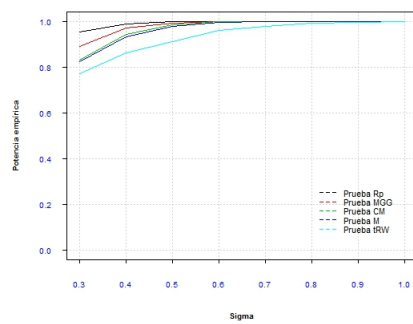


Figura 15: Potencias de las pruebas para  $DLN(0.6, \sigma)$