
Modelo lineal dinámico para estimar la tasa de desempleo en Bogotá D.C.

Dynamic linear model to estimate the unemployment rate in Bogotá D.C.

Eduardo Archila^a

jorgearchila@usantotomas.edu.co

Harrison Suarez^c

harrisonsuarez@usantotomas.edu.co

Felipe Herrera^b

juanherrera@usantotomas.edu.co

Dagoberto Bermúdez^d

dagobertobermudez@usantotomas.edu.co

Andrés Cruz^e

dec.estadistica@usantotomas.edu.co

Resumen

Para este proyecto, se desarrolló la estimación de la tasa de desempleo en Bogotá D.C. y se analizó la relación con algunas variables de interés, todo ello desde el punto de vista estadístico frecuentista y bayesiano. Inicialmente, se realizó una exploración general de series temporales para la tasa de desempleo, donde se evidenció que nuestra variable no era estacionaria. Por lo tanto, se decidió aplicar logaritmos y una diferencia para transformar nuestra serie y lograr la estacionariedad, necesaria para obtener una buena estimación. Posteriormente, se llevó a cabo la estimación frecuentista bajo la metodología Box-Jenkins de varios modelos ARIMA, seleccionando el mejor modelo bajo los criterios de información AIC y BIC. Despues, se verificaron los supuestos más importantes para los residuales del modelo escogido. Finalmente, se realizaron pronósticos para seis meses adelante (julio 2022 a diciembre 2022) de la tasa de desempleo en Bogotá D.C.

Por otro lado, se realizó la estimación de la tasa de desempleo desde el punto de vista bayesiano, partiendo del supuesto de que tanto la distribución a priori como la a posteriori siguen una distribución normal. Posteriormente, se hizo la estimación polinómica de primer orden y los pronósticos para seis meses adelante.

Al finalizar, se hizo una comparación entre la metodología frecuentista y bayesiana para concluir cuál fue la mejor para la estimación de la tasa de desempleo en Bogotá D.C. Despues de esto, se plantearon varios modelos dinámicos normales, seleccionando los mejores y observando sus resultados, logrando así llegar al mejor modelo posible.

^aUniversidad Santo Tomás

^bUniversidad Santo Tomás

^cUniversidad Santo Tomás

^dUniversidad Santo Tomás

^eFacultad de Estadística Universidad Santo Tomás

Palabras clave: Tasa de desempleo, Modelos ARIMA, Estadística bayesiana, Series temporales, Modelos dinámicos.

Abstract

For this project, the estimation of the unemployment rate in Bogotá D.C. was developed, and the relationship with some variables of interest was analyzed, all from the frequentist and Bayesian statistical point of view. Initially, a general exploration of time series for the unemployment rate was carried out, where it was evidenced that our variable was not stationary. Therefore, it was decided to apply logarithms and a difference to transform our series and achieve stationarity, necessary for a good estimation. Subsequently, the frequentist estimation was carried out under the Box-Jenkins methodology of various ARIMA models, selecting the best model under the AIC and BIC information criteria. Afterward, the most important assumptions for the residuals of the chosen model were verified. Finally, forecasts were made for six months ahead (July 2022 to December 2022) of the unemployment rate in Bogotá D.C.

On the other hand, the estimation of the unemployment rate from the Bayesian point of view was carried out, starting from the assumption that both the prior and posterior distribution follow a normal distribution. Subsequently, the first-order polynomial estimation and forecasts for six months ahead were made.

In conclusion, a comparison was made between the frequentist and Bayesian methodology to conclude which was the best for the estimation of the unemployment rate in Bogotá D.C. After this, several normal dynamic models were proposed, selecting the best ones and observing their results, thus achieving the best possible model.

Keywords: Unemployment rate, ARIMA models, Bayesian statistics, Time series, Dynamic models.

1. Introducción

En este artículo, exploramos la relación entre la tasa de desempleo y algunas variables de interés en la ciudad de Bogotá, utilizando datos del período comprendido entre enero de 2018 y junio de 2022. Nuestro objetivo es ajustar diferentes modelos estadísticos para identificar el que mejor se adapte a nuestros datos, comenzando con modelos sencillos como el ARMA y avanzando hacia modelos más complejos como los dinámicos.

Para el desarrollo de este trabajo, las variables explicativas fueron obtenidas de la Secretaría Distrital de Seguridad, Convivencia y Justicia. Específicamente, se tomaron los casos totales de hurtos de bicicletas, celulares y motocicletas registrados en la página de SIEDCO de la SIJIN en Bogotá D.C. En cuanto a nuestra variable de interés o respuesta, se utilizó la tasa de desempleo mensual para Bogotá D.C., presentada por el Departamento Nacional de Estadística (DANE), que es la relación porcentual entre el número de personas buscando trabajo (desocupados) y el número de personas que integran la fuerza laboral (PEA).

En cuanto a las variables consideradas, la tasa de desempleo (variable respuesta) mide el porcentaje de personas sin trabajo en la ciudad de Bogotá D.C. para el período dado. Otras variables incluyen

el hurto de celulares, que mide el número de robos reportados; la tasa de informalidad, que mide el porcentaje de personas que trabajan de manera informal; el Índice de Precios al Productor (IPP), que mide la variación de los precios de producción en la economía; y los homicidios, que registran el número de casos reportados en la ciudad durante el período analizado. Todas estas variables se consideran en nuestro análisis para entender mejor las dinámicas del desempleo en Bogotá.

2. Antecedentes

Encontramos un estudio en la Universidad Los Libertadores, donde estiman el comportamiento de la cartera vencida para créditos en la modalidad de consumo frente a la tasa de desempleo. Proponen el mejor modelo estadístico posible para esta estimación, pero se limitan a modelos SARIMAX. Consideramos que nuestro trabajo tiene un valor añadido respecto a este artículo porque avanzamos hasta modelos dinámicos (Saavedra, Erick, 2021).

También encontramos estadísticamente un estudio que identifica las características principales de la serie de tiempo de la tasa de desempleo en Bogotá. Sin embargo, concluyen que hay presencia de raíz unitaria, por lo que consideramos que nuestro trabajo profundiza mucho más en el tema (Rangel A., 2007).

A nivel internacional, encontramos un estudio que realizó un modelo benchmark univariado para la tasa de desempleo de Chile. En este estudio se hicieron predicciones mediante la familia de modelos SARIMA y, posteriormente, se realizaron comparaciones para determinar cuál modelo pronostica mejor (Contreras J., 2011).

En nuestra universidad, se desarrolló un trabajo muy similar al que queremos realizar, es decir, un modelo beta dinámico, pero en este caso, se aplicó a la habitabilidad de las calles de Bogotá D.C. En este trabajo, se busca, mediante este modelo, identificar los factores que influyen en la proporción de habitantes de la calle en Bogotá D.C. (Mendoza D., 2017).

Además, en nuestra universidad se realizó un beta dinámico para la tasa de desempleo, pero en este caso para todo Colombia y para el período comprendido entre 2001 y 2017. Es un artículo muy similar, pero nosotros queremos observar otro período con el plus del efecto pandemia (Bautista L., 2018).

3. Estimación frecuentista

En la Figura 1, se evidencia que no hay varianza y media constante a través del tiempo en la serie. Por lo tanto, esto puede ser indicio de no estacionariedad. Además, cabe mencionar que en el año 2020 hubo un aumento significativo de la tasa de desempleo en Bogotá D.C. debido a la pandemia por COVID-19.

Para evaluar la estacionariedad de la serie de la tasa de desempleo en Bogotá D.C., se llevó a cabo la prueba de Dickey-Fuller. Los resultados indicaron un p-valor de 0.8147, lo que sugiere que, a un nivel de significancia del 0.05, no se puede rechazar la hipótesis nula (H_0), indicando así que la serie no es estacionaria. Esto implica que la serie presenta tendencias o patrones que varían con el tiempo, lo cual es un aspecto crucial a considerar antes de proceder con análisis o modelados

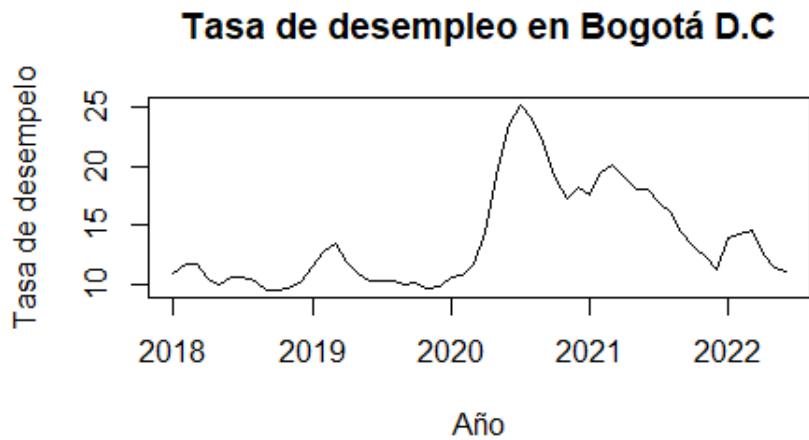


Figura 1: Gráfico de la serie temporal.

adicionales.

Para transformar la serie en una estacionaria, se aplicaron logaritmos con el fin de estabilizar la varianza y, posteriormente, se realizó una diferenciación para estabilizar la media. Tras estas transformaciones, se efectuó nuevamente la prueba de Dickey-Fuller, obteniendo un p-valor de 0.03443. Dado que este valor es menor al nivel de significancia del 0.05, se tiene suficiente evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula, concluyendo que la serie transformada es estacionaria. Este resultado es fundamental para el análisis posterior y la construcción de modelos predictivos fiables.

Se decidió realizar varias estimaciones de un modelo ARIMA con diferentes combinaciones en el orden autorregresivo y de medias móviles, con el propósito de escoger el mejor modelo en función de los criterios de información AIC y BIC. Cabe mencionar que no se tomó en cuenta la parte estacional en el modelo ARIMA, ya que no se observaron componentes estacionales en la serie. A continuación, se presenta una tabla con algunos criterios de información para nuestros modelos ARIMA estimados:

Modelo	AIC	BIC
ARIMA(1,1,1)	171.2490	177.1599
ARIMA(1,1,0)	170.1707	174.1113
ARIMA(0,1,1)	175.0863	179.0269
ARIMA(3,1,1)	167.4913	177.3427
ARIMA(3,1,0)	165.5152	173.3964
ARIMA(2,1,1)	168.5665	176.4477

Tabla 1: Criterios de información para modelos ARIMA estimados.

Observando los criterios de información de cada modelo, se evidenció que el mejor modelo fue el ARIMA(3,1,0), dado que tuvo los menores valores en los criterios de información AIC y BIC, con 165.5152 y 173.3964 respectivamente.

El modelo escogido es un ARIMA(3,1,0) que con sus parámetros se escribiría así:

$$(1 - \theta_1\beta^1 - \theta_2\beta^2 - \theta_3\beta^3)(1 - \beta^1)X_t = a_t \quad (1)$$

$$(1 - 0.6366\beta^1 - 0.0504\beta^2 + 0.3445\beta^3)(1 - \beta^1)X_t = a_t \quad (2)$$

Por último, se realizaron los pronósticos seis meses adelante de la tasa de desempleo en Bogotá D.C., con un nivel de confianza del 95 %.

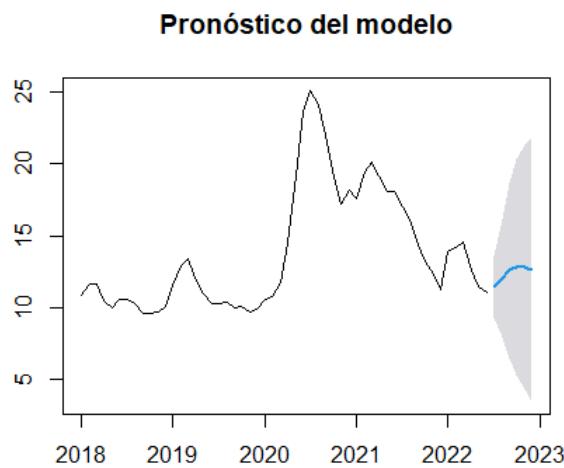


Figura 2: Valores pronosticados de la tasa de desempleo.

A continuación, se presenta un resumen de la información de los pronósticos realizados:

Fecha	Pronóstico
Julio 2022	11.47889
Agosto 2022	12.07885
Septiembre 2022	12.61768
Octubre 2022	12.86041
Noviembre 2022	12.83541
Diciembre 2022	12.64612

Tabla 2: Pronósticos de la tasa de desempleo en Bogotá D.C.

MAPE	RMSE
5.62692	1.050639

Tabla 3: Criterios de calidad del pronóstico.

Para confirmar que los pronósticos de la tasa de desempleo fueron buenos, se tomaron en cuenta el error porcentual absoluto medio (MAPE) y el error cuadrático medio (RMSE). Cuanto más bajos sean sus valores, mejores serán los pronósticos. Dado que el MAPE y el RMSE obtuvieron valores de 5.62692 y 1.050639 respectivamente, podemos concluir que los pronósticos de la tasa de desempleo en Bogotá D.C. fueron satisfactorios, ya que sus valores fueron relativamente bajos.

4. Estimación del modelo bayesiano de primer orden

En esta sección, utilizaremos un modelo polinomial de primer orden para la tasa de desempleo en Bogotá D.C. Dado que el modelo propuesto es de primer orden, los supuestos del modelo y sus parámetros serían los siguientes:

$$\begin{aligned} FF &= 1 & V_t &= 4 & GG &= 1 \\ W_t &= 4 & M_0 &= 0 & C_0 &= 1e^{-0.7} \\ Y_t &= \mu_t + V_t & V_t &\sim N(0, 4) & G_l &= 1 \\ \mu_t &= \mu_{t-1} + W_t & W_t &\sim N(0, 4) \end{aligned}$$

Consideramos que, dada la naturaleza de la variable, la desviación estándar es de 4, a partir de ello construimos el modelo.

$$\begin{aligned} Y_t/\theta_t &\sim N_3(\theta_t, 4) \\ \theta_t/\theta_{t-1} &\sim N(\theta_{t-1}, 4) \end{aligned} \tag{3}$$

Teniendo en cuenta nuestro modelo anterior, calculamos los valores estimados y podemos ver el suavizado de la serie, que se comporta de forma similar a la serie original.

Usando la librería JAGS en RStudio, realizamos el quemado y adelgazado de la serie para pronosticar las siguientes seis tasas de desempleo para el año 2022. Para este proceso de quemado y adelgazado, iteramos mil veces, usando tres cadenas y quemando o removiendo cien datos. Nuestros pronósticos son:

Como podemos observar en la tabla anterior, los pronósticos por el método frecuentista se estabilizan alrededor del 12 %, mientras que por el método bayesiano los valores son menores del 11 %, teniendo en cuenta el proceso de quemado y adelgazado que realizamos para la convergencia de nuestro parámetro.

El DIC para nuestro modelo es 41323.74 (cuarenta y un mil trescientos veintitrés punto setenta y cuatro). Debemos tener en cuenta que este criterio es especializado en la metodología bayesiana y generaliza el BIC y el AIC. En este caso, no tenemos con qué compararlo, por lo que no podríamos decir si es bueno o malo, pero deberíamos buscar el menor valor posible.

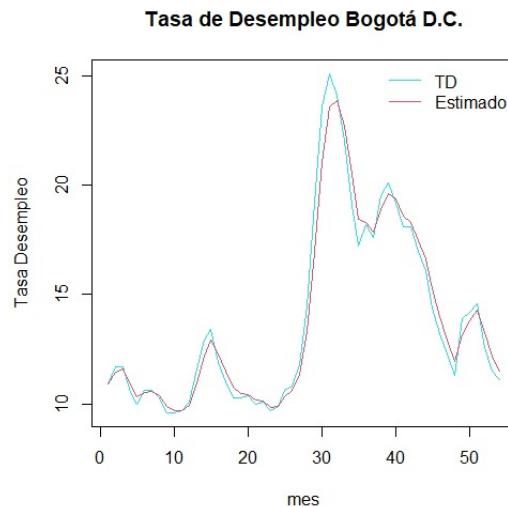


Figura 3: Tasa de desempleo real y estimada.

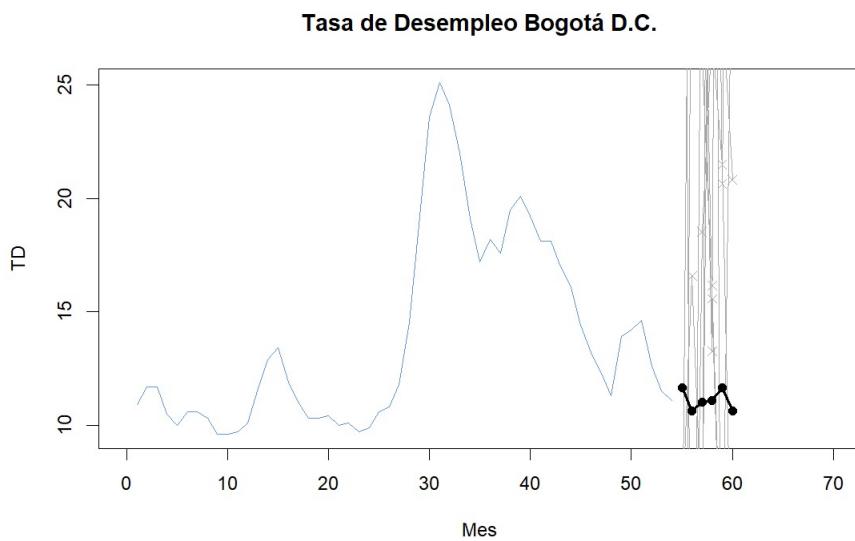


Figura 4: Pronósticos de la tasa de desempleo.

5. Modelo lineal dinámico

Para esta parte, planteamos treinta modelos diferentes para la tasa de desempleo, considerando todas las variables explicativas con las que contamos, con el objetivo de escoger más adelante el

Mes pronosticado	Estimación frecuentista	Estimación bayesiana
Julio 2022	11.47889	11.64588
Agosto 2022	12.07885	10.63833
Septiembre 2022	12.61768	11.01366
Octubre 2022	12.86041	11.1
Noviembre 2022	12.83541	11.64588
Diciembre 2022	12.64612	10.63833

Tabla 4: Comparación de pronósticos de la tasa de desempleo en Bogotá D.C.

mejor. A continuación, se presentan los resultados:

Modelo	Variables explicativas	Intercepto	DIC	Mape
1	Tasa informalidad	Sí	963.3432	1267.54 %
2	Tasa informalidad	No	779.7544	1267.69 %
3	IPP	Sí	2792.197	1271.43 %
4	IPP	No	790.0097	1309.31 %
5	Log hurto celulares	Sí	2423.281	1267.60 %
6	Log hurto celulares	No	2252.214	1267.41 %
7	Log homicidios	Sí	2873.168	1267.80 %
8	Log homicidios	No	2755.115	1267.97 %
9	Tasa informalidad, IPP	Sí	890.0737	1260.15 %
10	Tasa informalidad, IPP	No	882.1041	1263.01 %
11	Tasa informalidad, log hurto celulares	Sí	775.06	1261.94 %
12	Tasa informalidad, log hurto celulares	No	999.7645	1264.11 %
13	Tasa informalidad, log homicidios	Sí	855.397	1261.42 %
14	Tasa informalidad, log homicidios	No	975.9593	1264.79 %
15	IPP, log hurto celulares	Sí	2152.065	1265.49 %
16	IPP, log hurto celulares	No	2352.777	1267.16 %
17	IPP, log homicidios	Sí	2408.58	1265.71 %
18	IPP, log homicidios	No	2725.596	1267.04 %
19	log hurto celulares, log homicidios	Sí	2112.606	1265.87 %
20	log hurto celulares, log homicidios	No	2287.416	1266.89 %
21	Tasa informalidad, IPP, log hurto celulares	Sí	796.5836	1269.04 %
22	Tasa informalidad, IPP, log hurto celulares	No	846.4173	1260.93 %
23	IPP, log hurto celulares, log homicidios	Sí	2038.845	1266.85 %
24	IPP, log hurto celulares, log homicidios	No	2076.087	1264.79 %
25	Tasa informalidad, IPP, log homicidios	Sí	923.8304	1269.39 %
26	Tasa informalidad, IPP, log homicidios	No	930.6669	1262.53 %
27	Tasa informalidad, log homicidios, log hurto celulares	Sí	888.0072	1265.81 %
28	Tasa informalidad, log homicidios, log hurto celulares	No	846.4173	1260.93 %
29	Tasa informalidad, IPP, log hurto celulares	Sí	920.1902	1264.25 %
30	Tasa informalidad, IPP, log hurto celulares	No	998.1686	1266.87 %

Tabla 5: Comparación modelos de la tasa de desempleo en Bogotá D.C.

Primero compararemos los modelos teniendo en cuenta el deviance information criterion (DIC), puesto que en este caso es posible compararlos por este criterio al ser modelos de la misma familia. Según esto, el mejor modelo sería el número once, que presenta el DIC más bajo, que es 775.06. Cuando se compara utilizando el MAPE (Mean Absolute Percentage Error), el mejor modelo resulta ser el número nueve.

Según el criterio DIC, escogimos el modelo número once, es decir, un modelo con tasa de desempleo (TD) como variable respuesta y como variables explicativas, la tasa de informalidad y el logaritmo de los hurtos de celulares, con intercepto. Este modelo se escribiría así:

$$TD_i = \beta_0 + \beta_1 T.informalidad_i + \beta_2 \log(H.celulares)_i \quad (4)$$

Como podemos observar en la Figura 5, la primera gráfica muestra una buena similitud entre la tasa de desempleo real y la estimada por nuestro modelo. El coeficiente β_0 parece poco significativo, a pesar de que el modelo sin intercepto dio un mejor DIC. El coeficiente β_1 también parece poco significativo, ya que su intervalo de confianza siempre incluye al cero, lo mismo ocurre para β_2 .

Según el MAPE, el mejor modelo es el número nueve, es decir, un modelo con tasa de desempleo como variable respuesta y como variables explicativas, la tasa de informalidad y el IPP, con intercepto. Este modelo se escribiría así:

$$TD_i = \beta_0 + \beta_1 T.informalidad_i + \beta_2 IPP_i \quad (5)$$

Como podemos observar en la Figura 6, la primera gráfica muestra una buena similitud entre la tasa de desempleo real y la estimada por nuestro modelo. Para el coeficiente β_0 , se observa una situación similar al modelo anterior, es decir, parece poco significativo a pesar de que mejoró en comparación con el modelo sin intercepto. Los coeficientes β_1 y β_2 muestran que el cero no está siempre incluido en su intervalo de confianza, pero ocurre en la mayoría de los casos. Por lo tanto, concluimos que, hasta el momento, este es nuestro mejor modelo.

En conclusión, después de analizar treinta modelos diferentes para la tasa de desempleo en Bogotá D.C., considerando diversas combinaciones de variables explicativas, hemos identificado los modelos más prometedores según dos criterios distintos: el deviance information criterion (DIC) y el Mean Absolute Percentage Error (MAPE). El modelo número once, que incluye la tasa de informalidad y el logaritmo de los hurtos de celulares como variables explicativas, se destacó como el mejor según el criterio DIC, con un valor de 775.06. Por otro lado, el modelo número nueve, que incorpora la tasa de informalidad y el IPP, resultó ser el mejor según el criterio MAPE. A pesar de algunas limitaciones en la significancia de los coeficientes, estos modelos muestran una buena capacidad para estimar la tasa de desempleo real y representan herramientas valiosas para entender y predecir este importante indicador económico y social en la ciudad.

6. Modelo beta dinámico

Luego de realizar el proceso para la construcción del modelo generalizado beta para nuestros datos, encontramos que el modelo no es consistente y, por lo tanto, no es posible ajustar tal modelo. Este resultado podría deberse a la naturaleza de los datos o a la especificación del modelo. Validaremos

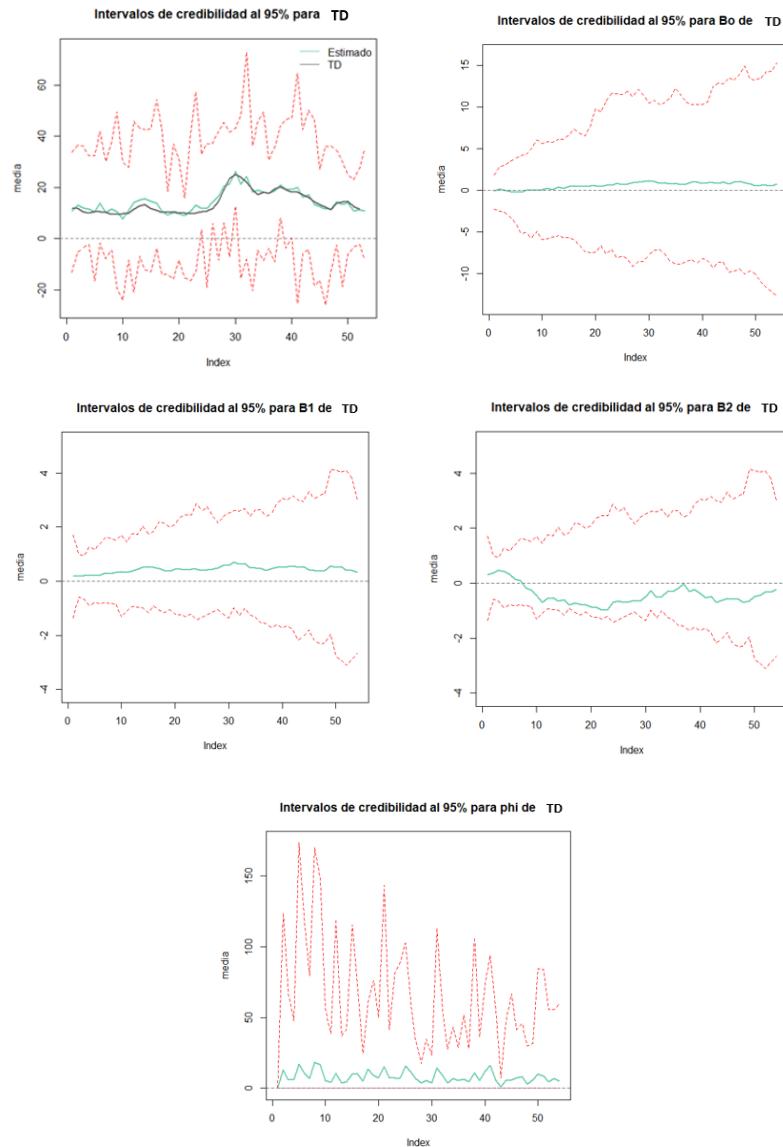


Figura 5: Parámetros del mejor modelo según DIC.

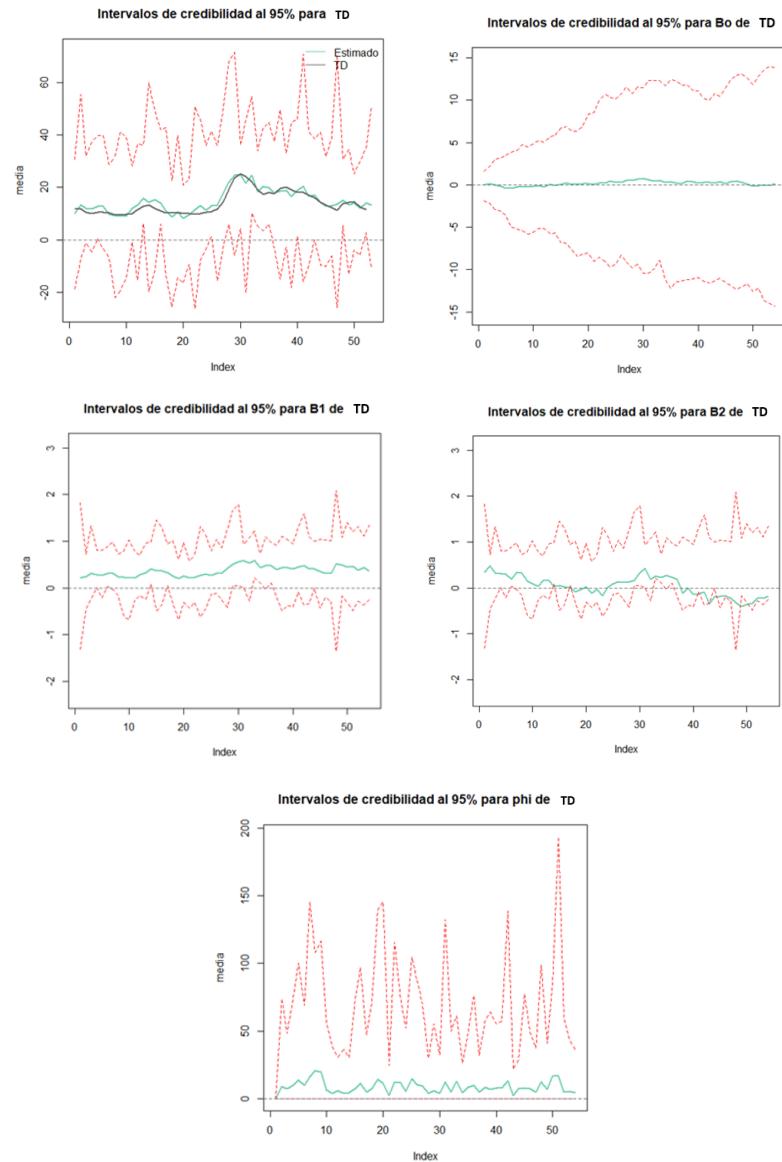


Figura 6: Parámetros del mejor modelo según MAPE.

a continuación un modelo jerárquico que se ajuste correctamente y nos permita estimar la tasa de desempleo para los siguientes periodos de la muestra.

Modelo lineal dinámico jerárquico

Para el caso del modelo jerárquico, planteamos todos los posibles modelos con intercepto, ya que en todos los tipos de modelo realizados antes nos da mejor siempre un modelo con intercepto. Al comparar todos nuestros modelos, obtendríamos lo siguiente:

Modelo	Variables explicativas	DIC	MAPE
1	Tasa informalidad	1559.898	27.05629 %
2	IPP	744.2957	8.004847 %
3	Log hurto celulares	975.6512	9.268254 %
4	Log homicidios	898.6031	8.454564 %
5	Tasa informalidad, IPP	1604.774	45.08928 %
6	Tasa informalidad, log hurto celulares	1600.339	32.26003 %
7	Tasa informalidad, log homicidios	1622.763	41.45262 %
8	IPP, log hurto celulares	1120.6195	18.3374 %
9	IPP, log homicidios	1050.521	14.13069 %
10	log hurto celulares, log homicidios	1113.82	17.35041 %

Tabla 6: Comparación modelos jerárquicos de la tasa de desempleo en Bogotá D.C.

Al hacer todos los modelos con una variable explicativa y todas las posibles combinaciones para dos variables explicativas, observamos que el agregar más variables no disminuyó ni el DIC ni el MAPE. Por lo tanto, decidimos no intentar combinaciones con más variables.

Mejor modelo jerárquico por criterios

Para nuestro caso, según el DIC y el MAPE, nuestro mejor modelo es el número dos, es decir, un modelo jerárquico con la tasa de desempleo como variable respuesta, el IPP como variable explicativa y con intercepto. Este modelo se escribiría así:

$$TD_t = \beta_{0t} + \beta_{1t}IPP_t + V_t$$

Donde:

$$\begin{aligned} \beta_{0t} &= \alpha_{0t} + \alpha_{1t}TD_{t-1} + \alpha_{2t}TD_{t-2} + W_{1t} \\ \beta_{1t} &= \gamma_{0t} + \gamma_{1t}TD_{t-1} + \gamma_{2t}TD_{t-2} + W_{2t} \\ \alpha_{0t} &= \alpha_{0,t-1} + U_{1t} \quad \alpha_{1t} = \alpha_{1,t-1} + U_{2t} \quad \alpha_{2t} = \alpha_{2,t-1} + U_{3t} \\ \gamma_{0t} &= \gamma_{0,t-1} + Z_{1t} \quad \gamma_{1t} = \gamma_{1,t-1} + Z_{2t} \quad \gamma_{2t} = \gamma_{2,t-1} + Z_{3t} \\ U_{it} &\sim N(0, \sigma_{U_i}^2) \quad Z_{it} \sim N(0, \sigma_{Z_i}^2) \end{aligned}$$

El análisis de la tasa de desempleo en Bogotá D.C. a través de modelos jerárquicos ha revelado que el modelo más adecuado según los criterios de DIC y MAPE es aquel que utiliza el IPP como

única variable explicativa, junto con un intercepto. Este modelo proporciona una mejor ajuste en comparación con los otros modelos considerados, incluyendo aquellos con más variables explicativas. Los resultados sugieren que el IPP es un indicador significativo en la predicción de la tasa de desempleo, y que la inclusión de más variables no necesariamente mejora la precisión del modelo. Este hallazgo subraya la importancia de la selección cuidadosa de variables en la modelación jerárquica y la utilidad de criterios como el DIC y el MAPE para guiar dicha selección.

7. Conclusiones

En este trabajo, se llevaron a cabo comparaciones exhaustivas de diversos modelos para predecir la tasa de desempleo, utilizando el MAPE (Mean Absolute Percentage Error) como criterio principal de evaluación. Los resultados indicaron que los modelos frequentista y jerárquico sobresalen por su precisión. Sin embargo, considerando el objetivo y la naturaleza del estudio, se optó por el modelo jerárquico como la mejor elección. A pesar de que la diferencia en el rendimiento entre ambos modelos no es significativa, el modelo jerárquico ofrece una estructura más compleja y robusta. Este modelo no solo es más avanzado desde un punto de vista metodológico, sino que también incorpora la dependencia de variables externas en lugar de depender únicamente de la variable de interés, lo que proporciona una perspectiva más amplia y detallada del comportamiento de la tasa de desempleo.

Además, la elección del modelo jerárquico se justifica por su capacidad para capturar la dinámica y las variaciones temporales de la tasa de desempleo de manera más efectiva. Al incorporar información adicional a través de variables explicativas y estructuras jerárquicas, se logra una mejor comprensión de los factores que influyen en la tasa de desempleo. Esto no solo mejora la precisión de las predicciones, sino que también proporciona insights valiosos para la formulación de políticas y la toma de decisiones. En resumen, el modelo jerárquico se destaca como una herramienta poderosa y versátil para el análisis y la predicción de la tasa de desempleo, ofreciendo ventajas significativas en términos de complejidad, interpretación y aplicabilidad práctica.

Recibido: noviembre 2022

Aceptado: mayo 2023

Referencias

- L. Bautista. Medición de la tasa de desempleo en colombia para el periodo 2001-2017 a través de un modelo beta dinámico. Marzo 2018.
- J. Contreras. En busca de un modelo benchmark univariado para predecir la tasa de desempleo de chile. *Cuadernos de Economía*, 30(55), Diciembre 2011.
- J. Durbin and S. J. Koopman. Time series analysis by state space methods. *Oxford Statistical Science Series*, 24, 2001.
- A. C. Harvey. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, 1990.

- D. Mendoza. Modelo beta dinámico: Una aplicación al fenómeno de la habitabilidad en calle en bogotá. Diciembre 2017.
- G. Petris, S. Petrone, and P. Campagnoli. *Dynamic linear models with r*. New York: Springer, 2009.
- A. Rangel. ¿histeresis en la tasa de desempleo de bogotá? *Revista de Economía Administración*, 4 (2), Diciembre 2007.
- E. Saavedra. Modelo de pronóstico para estimar el comportamiento de la cartera vencida para créditos en la modalidad consumo frente a la tasa de desempleo. 2021.
- M. West and J. Harrison. *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*. Springer, 2nd edition, 1997.